PART4　2 次方程式の解と係数の関係

例題

(1)　2 次方程式 $2x^2-2x+1=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(i)　$\alpha^2+\beta^2$　　(ii)　$\alpha^3+\beta^3$　　(iii)　$(\alpha-\beta)^2$

(2)　2 次式 $2x^2-3x+4$ を複素数の範囲で因数分解せよ。

(3)　2 次方程式 $x^2-3x+5=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$\alpha+1$，$\beta+1$ を 2 つの解とする 2 次方程式を 1 つ作れ。

Point Pickup

練習

(1)　2 次方程式 $2x^2-8x+5=0$ の 2 つの解を α, β とするとき，次の式の値を求めよ。

(i)　$\alpha^2+\beta^2$　　(ii)　$\alpha^3+\beta^3$　　(iii)　$(\alpha-\beta)^2$

(2)　2 次式 $4x^2+2x+1$ を複素数の範囲で因数分解せよ。

(3)　2 次方程式 $x^2+2x+4=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$\alpha-3$，$\beta-3$ を 2 つの解とする 2 次方程式を 1 つ作れ。

第 3 講　PART4 確認問題

1　2 次方程式 $2x^2-6x+3=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$\alpha^2+\beta^2$，$\alpha^3+\beta^3$，$(\alpha-\beta)^2$ の値を求めよ。

$$\alpha^2+\beta^2=\boxed{\text{ア}}$$

$$\alpha^3+\beta^3=\frac{\boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

$$(\alpha-\beta)^2=\boxed{\text{オ}}$$

2　2 次式 $3x^2+4x+5$ を複素数の範囲で因数分解せよ。

$$3x^2+4x+5$$

$$=\boxed{\text{カ}}\left(x+\frac{\boxed{\text{キ}}-\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}\,i}{3}\right)\left(x+\frac{\boxed{\text{キ}}+\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}\,i}{3}\right)$$

3　2 次方程式 $x^2+8x-1=0$ の 2 つの解を α,β とするとき，$\alpha-2$，$\beta-2$ を 2 つの解とする 2 次方程式を 1 つ作れ。

$$x^2+\boxed{\text{コサ}}x+\boxed{\text{シス}}=0$$

PART4　２次方程式の解と係数の関係

例題

(1)　２次方程式 $2x^2-2x+1=0$ の２つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(i)　$\alpha^2+\beta^2$　　(ii)　$\alpha^3+\beta^3$　　(iii)　$(\alpha-\beta)^2$

(2)　２次式 $2x^2-3x+4$ を複素数の範囲で因数分解せよ。

(3)　２次方程式 $x^2-3x+5=0$ の２つの解を α，β とするとき，$\alpha+1$，$\beta+1$ を２つの解とする２次方程式を１つ作れ。

(1)　解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{-2}{2}=1,\quad \alpha\beta=\frac{1}{2}$$

(i)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\cdot\frac{1}{2}=0$

(ii)　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=1^3-3\cdot\frac{1}{2}\cdot1=-\frac{1}{2}$

(iii)　$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1^2-4\cdot\frac{1}{2}=-1$

(2)　２次方程式 $2x^2-3x+4=0$ の解は

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot2\cdot4}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{-23}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{23}\,i}{4}$$

よって　$2x^2-3x+4=2\left(x-\frac{3+\sqrt{23}\,i}{4}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{23}\,i}{4}\right)$

(3)　解と係数の関係より $\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=5$

ここで

$$(\alpha+1)+(\beta+1)=(\alpha+\beta)+2=3+2=5$$

$$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=5+3+1=9$$

より，$\alpha+1$，$\beta+1$ を解にもつ２次方程式の１つは

$$x^2-5x+9=0$$

練習

(1)　２次方程式 $2x^2-8x+5=0$ の２つの解を α, β とするとき，次の式の値を求めよ。

(i)　$\alpha^2+\beta^2$　　(ii)　$\alpha^3+\beta^3$　　(iii)　$(\alpha-\beta)^2$

(2)　２次式 $4x^2+2x+1$ を複素数の範囲で因数分解せよ。

(3)　２次方程式 $x^2+2x+4=0$ の２つの解を α，β とするとき，$\alpha-3$，$\beta-3$ を２つの解とする２次方程式を１つ作れ。

(1)　解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{-8}{2}=4,\quad \alpha\beta=\frac{5}{2}$$

(i)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4^2-2\cdot\dfrac{5}{2}=11$

(ii)　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=4^3-3\cdot\dfrac{5}{2}\cdot4=34$

(iii)　$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4^2-4\cdot\dfrac{5}{2}=6$

(2)　２次方程式 $4x^2+2x+1=0$ の解は

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{4}$$

よって　$4x^2+2x+1=4\left(x-\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{4}\right)\left(x-\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{4}\right)$

$$=4\left(x+\frac{1-\sqrt{3}\,i}{4}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{3}\,i}{4}\right)$$

(3)　解と係数の関係より $\alpha+\beta=-2$，$\alpha\beta=4$

ここで

$$(\alpha-3)+(\beta-3)=(\alpha+\beta)-6=-2-6=-8$$

$$(\alpha-3)(\beta-3)=\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9=4-3\cdot(-2)+9=19$$

より，$\alpha-3$，$\beta-3$ を解にもつ２次方程式の１つは

$$x^2+8x+19=0$$

第 3 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：6，イウ：27，エ：2，オ：3

[解説]

解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{-6}{2}=3,\ \alpha\beta=\frac{3}{2}$$ [A]

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2\cdot\frac{3}{2}$$ [B]

$$=9-3=\mathbf{6}$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$ [B]

$$=3^3-3\cdot\frac{3}{2}\cdot3$$

$$=27-\frac{27}{2}=\mathbf{\frac{27}{2}}$$

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$

$$=3^2-4\cdot\frac{3}{2}$$

$$=9-6=\mathbf{3}$$

[A]　2 次方程式の解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とすると

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

[B]　$\alpha^2+\beta^2$，$\alpha^3+\beta^3$ を $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ を用いて表す。

$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ より

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ より

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

2 [正解] カ：3，キ：2，クケ：11

[解説]

2 次方程式 $3x^2+4x+5=0$ の解は

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-3\cdot 5}}{3}$$
$$=\frac{-2\pm\sqrt{-11}}{3}$$
$$=\frac{-2\pm\sqrt{11}\,i}{3}$$

よって

$$3x^2+4x+5$$
$$=3\left(x-\frac{-2+\sqrt{11}\,i}{3}\right)\left(x-\frac{-2-\sqrt{11}\,i}{3}\right) \text{[C]}$$
$$=\boldsymbol{3\left(x+\frac{2-\sqrt{11}\,i}{3}\right)\left(x+\frac{2+\sqrt{11}\,i}{3}\right)}$$

[C]　2 次式の因数分解
2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とすると
$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

3 [正解] コサ：12，シス：19

[解説]

解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-8,\ \alpha\beta=-1 \text{[D]}$$

ここで

$$(\alpha-2)+(\beta-2)=(\alpha+\beta)-4$$
$$=-8-4$$
$$=-12$$
$$(\alpha-2)(\beta-2)=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4$$
$$=-1-2\cdot(-8)+4$$
$$=19$$

よって，$\alpha-2$，$\beta-2$ を解にもつ 2 次方程式の 1 つは

$$\boldsymbol{x^2+12x+19=0} \text{[E]}$$

[D]　2 次方程式の解と係数の関係
2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とすると
$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$，$\alpha\beta=\frac{c}{a}$

[E]　2 数 α，β を解とする 2 次方程式の 1 つは
$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$